23222/33082

B.A./B.Sc. IIIrd Semester (NEP) Examination, 2024

(Regular/Back-Paper/Imp./Exempt)

MATHEMATICS

(Mechanics)

Paper : II (Major)

Time : 2 Hours] [*M.M. : 75*

Note :– Attempt *Four* questions in all. *One* question out of two questions (15 marks each) is to be attempted from Section 'A'. Remaining *three* questions (each carrying 20 marks) are to be attempted out of eight questions given in Section 'B'.

नोट :– कुल **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड 'अ' के दो प्रश्नों में से **एक** प्रश्न (प्रत्येक 15 अंक) कीजिए। खण्ड 'ब' के आठ प्रश्नों में से कोई **तीन** प्रश्न (प्रत्येक 20 अंक) किये जाने हैं।

Section A

(खण्ड अ)

[15×1=15]

Note : Attempt any *one* question.

नोट : किसी एक प्रश्न का उत्तर दीजिए।

1. (a) Forces X, Y and Z act along the straight lines $y = b$, $Z = -C$; $Z = C$, $x = -a$ and $x = a$, $y = -b$ respectively. Show that they will have a single resultant if :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{C}{Z}=0$$

बल X, Y और Z क्रमशः सीधी रेखाओं $y = b$, $Z = -C$; $Z = C$, $x = -a$ और $x = a$, $y = -b$ के अनुदिश कार्य करते हैं। दिखाइए कि उनका एक ही परिणामी होगा, यदि :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{C}{Z}=0$$

(b) Forces of magnitude la, mb, nc act along three non-intersecting edges of a parallelopiped whose lengths are a, b, c respectively. Prove that second invariant of the system is $(mn + nl + lm)V$, where V is the volume of parallelopiped.

la, mb, nc परिमाण के बल एक समान्तर चतुर्भुज के तीन अप्रतिच्छेदी किनारों पर कार्य करते हैं जिनकी लम्बाई क्रमशः a, b, c हैं। सिद्ध कीजिए कि तंत्र का दूसरा अपरिवर्तनीय $(mn + nl + lm)V$ है, जहाँ V समान्तर चतुर्भुज का आयतन है।

Or

(अथवा)

2. (a) Define null lines and null planes. Also find the equation of null plane.

शून्य रेखा और शून्य तल को परिभाषित कीजिए। शून्य तल का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

(b) A system of forces acting on a space craft is equivalent to a force $\hat{i}-\hat{k}$ acting at the origin and couple $2\hat{i}+\hat{j}$. Find the wrench equivalent to this system.

एक अन्तरिक्ष यान पर कार्य करने वाले बलों की एक प्रणाली मूलबिन्दु पर कार्य करने वाले बल $\hat{i}-\hat{k}$ के बराबर है और बल युग्म $2\hat{i}+\hat{j}$ है। इस प्रणाली के समतुल्य रेन्च प्राप्त कीजिए।

Section–B

(खण्ड–ब) [20×3=60]

Note :– Attempt any *three* questions.

नोट :– किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

3. (a) Five weightless rods of equal length are joined together so as to form a rhombus ABCD with one diagonal BD. If a weight W is attached to C and system is suspended from A, show that there is a thrust in BD equal to $\frac{W}{\sqrt{3}}$.

समान लम्बाई की पाँच भारहीन छड़ों को एक साथ जोड़ा जाता है ताकि एक विकर्ण BD के साथ एक समचतुर्भुज ABCD बनाया जा सके। यदि एक भार W, C से संलग्न है और सिस्टम A से लटकाया गया है तो सिद्ध कीजिए BD में प्रणोद $\frac{W}{\sqrt{3}}$ के बराबर है।

(b) Two equal uniform rods AB and AC each of length $2b$ are freely jointed at A and rest on a smooth vertical circle of radius a. If 2θ be the angle between them, then show that :

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

दो समान, एकरूप छड़ें AB और AC, प्रत्येक की लम्बाई $2b$ है, A पर स्वतंत्र रूप से जुड़ी हुई हैं और त्रिज्या a के एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर टिकी हुई हैं। यदि 2θ उनके बीच का कोण है तो सिद्ध कीजिए :

$$b \sin^3 \theta = a \cos \theta$$

4. (a) A uniform beam of thickness $2b$ rests symmetrically on a perfectly rough horizontal cylinder of radius a. Show that the equilibrium of beam will be stable or unstable according as b is less than or greater than a.

$2b$ मोटाई की एकरूप बीम, त्रिज्या a के बिल्कुल खुरदरे क्षैतिज बेलन पर सममित रूप से टिकी हुई है। सिद्ध कीजिए कि बीम का संतुलन b, a से कम या अधिक के अनुसार स्थिर या अस्थिर होगा।

(b) A solid sphere rests inside a fixed rough hemispherical bowl of twice its radius. Show that, however large a weight is attached to the highest point of the sphere, the equilibrium is stable.

एक ठोस गोला अपनी त्रिज्या के दोगुने आकार के एक निश्चित खुरदरे अर्द्ध-गोलाकार कटोरे के अन्दर रखा हुआ है। सिद्ध कीजिए, गोले के उच्चतम बिंदु पर कितना भी बड़ा भार जुड़ा हो, संतुलन स्थिर है।

5. (a) Find the Cartesian equation of common catenary.

सामान्य रज्जुका का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) A uniform chain of length l is to be suspended from two points A and B in the same horizontal line so that either terminal tension is n times of that at the lowest point. Show that the span AB is :

$$\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$$

लम्बाई l की एक समान शृंखला को एक ही क्षैतिज रेखा में दो बिन्दु A और B से इस प्रकार लटकाया जाता है कि कोई भी चरम तनाव निम्नतम बिन्दु का n गुना है। सिद्ध कीजिए कि विस्तार AB, $\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$ है।

6. (a) Find radial and transverse velocities of a particle moving in a plane curve.

समतल वक्र में गतिमान कण का त्रिज्यक और अनुप्रस्थ वेग ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the acceleration of a point moving in a curve with uniform speed is $\delta\psi^2$.

सिद्ध कीजिए कि एक वक्र में एकसमान गति से घूम रहे एक बिन्दु का त्वरण $\delta\psi^2$ है।

7. (a) Define simple harmonic motion and find expression for velocity.

सरल आवर्त गति को परिभाषित कीजिए और वेग के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए।

(b) Find the time period of a particle. Which slides down on the arc of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex downwards.

उस कण का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए जो एक चिकने चक्रज के चाप पर नीचे की ओर फिसलता है जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर और शीर्ष नीचे की ओर है।

8. (a) Find the greatest height of a particle which is projected upwards with a velocity V in a medium whose resistance varies as the square of the velocity.

एक कण की अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिए जो एक माध्यम में V वेग के साथ ऊपर की ओर प्रक्षेपित होता है जिसका प्रतिरोध वेग वर्ग के अनुसार बदलता रहता है।

(b) Establish the formula $\bar{F}(t) = m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} + \lambda.\bar{u}$ for the motion of a particle of varying mass $m(t)$ moving with velocity $\bar{v}$ under the force $\bar{F}(t)$, matter being emitted at a constant rate λ with velocity $\bar{u}$ relative to the particle.

बल $\bar{F}(t)$ के तहत वेग $\bar{v}$ के साथ घूम रहे परिवर्तनीय द्रव्यमान $m(t)$ के एक कण की गति के लिए सूत्र $\bar{F}(t) = m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} + \lambda.\bar{u}$ स्थापित कीजिए, पदार्थ, कण के सापेक्ष वेग $\bar{u}$ के साथ एक स्थिर दर λ पर उतसर्जित होता है।

9. (a) Find the polar form of differential equation of a central orbit.

किसी केन्द्रीय कक्षा के अवकल समीकरण का ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए।

(b) If the central orbit $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ is generated under a force towards the pole, find the law of force.

यदि ध्रुव की दिशा में लगने वाले बल द्वारा निर्मित केन्द्रीय कक्षा $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ है, तब बल नियम ज्ञात कीजिए।

10. (a) If V_1 and V_2 are the velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that :

$$(1 - e)V_1 = (1 + e)V_2$$

यदि V_1 और V_2 किसी ग्रह के वेग हैं जब वह क्रमशः सूर्य से निकटतम और सबसे दूर है, सिद्ध कीजिए :

$$(1 - e)V_1 = (1 + e)V_2$$

(b) If ω is the angular velocity of a planet at the nearer end of the major axis, prove that its period is :

$$\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}$$

यदि प्रमुख अक्ष के निकटतम छोर पर किसी ग्रह का कोणीय वेग ω हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल है :

$$\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}$$