Question Paper Code : 21222/31082

B.A./B.Sc. (Semester-I) (NEP) Examination, 2023

(Regular/Imp.) (Major)

MATHEMATICS

[Paper : Second]

(Matrices and Algebra)

Time : Three Hours] **[Maximum Marks : 75**

Note : Answer **any five** questions. **All** questions carry **equal** marks.

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

1. (a) Find the rank of the following matrix A by reducing to normal form : [8]

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित करके उसकी कोटि ज्ञात कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

(b) Find the inverse of the following matrix A using row transformation only : [7]

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

आव्यूह A में केवल पंक्ति रूपान्तरण का प्रयोग करते हुए व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2. (a) Show that the following system of equations are consistent and find the values of x, y and z : [8]

$$4x+3y+6z=25$$
$$x+5y+7z=13$$
$$2x+9y+z=1$$

दर्शाइये कि निम्न समीकरणों का निकाय संगत है और x, y और z का मान ज्ञात कीजिए :

$$4x+3y+6z=25$$
$$x+5y+7z=13$$
$$2x+9y+z=1$$

(b) Find the real values of λ for which the following equations have a non-zero solution : [7]

$$x+2y+3z=\lambda x$$
$$3x+y+2z=\lambda y$$
$$2x+3y+z=\lambda z$$

λ का वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्न समीकरणों का अशून्य हल है :

$$x+2y+3z=\lambda x$$
$$3x+y+2z=\lambda y$$
$$2x+3y+z=\lambda z$$

3. (a) State and prove Cayley-Hamilton theorem and also verify Cayley-Hamilton theorem for matrix A : [8]

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन कीजिए और उसे सिद्ध कीजिए तथा आव्यूह A के लिए कैली-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

(b) If $a+b+c\neq 0$, find the characteristic roots of the matrix A : [7]

$$A=\begin{bmatrix}a & c & b\\ c & b & a\\ b & a & c\end{bmatrix}$$

यदि $a+b+c\neq 0$ आव्यूह A के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात कीजिए :

$$A=\begin{bmatrix}a & c & b\\ c & b & a\\ b & a & c\end{bmatrix}$$

4. (a) Show that the set of residue classes modulo 5 is an abelian group with respect to the addition of residue classes modulo 5. [8]

दर्शाइए कि अवशेष श्रेणी modulo 5, योगात्मक अवशेष श्रेणी modulo 5 के सापेक्ष एक आबेली समूह है।

(b) Define the order of an element of a group and also find the order of each element in multiplicative group : [7]

$G = \{1, -1, i, -i\}$

समूह में अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए और गुणनात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।

5. (a) Define subgroup of a group and show that the union of two subgroups of a group G is a subgroup of a group G if and only if one is contained in the other. [8]

समूह के उपसमूह को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि किसी समूह G के दो उपसमूहों का सम्मिलन G का उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक उपसमूह दूसरे में समाहित हों।

(b) Define cyclic group and prove that every group of prime order is cyclic. [7]

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है।

6. (a) State Fermat's theorem and find the remainder of 8^{103} when divided by 13. [8]

फर्मेट की प्रमेय का कथन कीजिए और 13 द्वारा 8^{103} को विभाजित किये जाने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

(b) Define normal subgroup. Prove that a subgroup H of a group G is normal in G if and only if $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$. [7]

प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए एक समूह G का एक उपसमूह H, G में प्रसामान्य होगा यदि और केवल यदि $gHg^{-1} = H$, $\forall g \in G$.

7. (a) State and prove Cayley's theorem. [8]

कैली की प्रमेय का कथन कीजिए और उसे सिद्ध कीजिए।

(b) Prove that out of $\lfloor n$ permutations on n symbols, $\frac{\lfloor n}{2}$ are even and $\frac{\lfloor n}{2}$ are odd. [7]

सिद्ध कीजिए कि n प्रतीकों के $\lfloor n$ क्रमचयों में से $\frac{\lfloor n}{2}$ सम तथा $\frac{\lfloor n}{2}$ विषम होते हैं।

8. (a) Define quotient group. Let f be a homomorphism of a group G onto a group G' with kernel K, then show that the quotient group $\frac{G}{K}$ is isomorphic to G'. [8]

विभाग समूह को परिभाषित कीजिए। यदि f समूह G से समूह G' पर एक आच्छादक समाकारिता है, जिसका अष्टि K हो, तो दर्शाइये कि विभाग समूह $\frac{G}{K}$ समूह G' के तुल्यकारी होता है।

(b) Let $\mathbb{R}$ be the group of real numbers under addition and $\mathbb{R}^+$ be the group of positive real numbers under multiplication. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ is defined by $f(x) = e^x$ for all $x \in \mathbb{R}$. Prove that f is an isomorphism. [7]

माना कि $\mathbb{R}$, योग के अन्तर्गत वास्तविक संख्याओं का समूह है और $\mathbb{R}^+$ गुणन के अन्तर्गत धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है। $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ में $f(x) = e^x$, सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि f तुल्याकारिता है।

9. (a) Prove that every field is an integral domain, but converse need not be true. [8]

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांक प्रान्त होता है, परन्तु इसका व्युत्क्रम सत्य होना जरूरी नहीं है।

(b) Prove that $R = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ (modulo 7) is a ring with respect to addition and multiplication. [7]

सिद्ध कीजिए कि $R = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ (modulo 7) योग एवं गुणन संक्रिया के सापेक्ष एक वलय है।

10. (a) Prove that the set of 2×2 matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ is a subring of the ring of all 2×2 matrices. [8]

सिद्ध कीजिए कि $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ प्रारूप के 2×2 आव्यूहों का समुच्चय सभी 2×2 आव्यूहों के वलय का उपवलय होता है।

(b) If R is a commutative ring and $a \in R$, then show that $Ra = \{ra \mid r \in R\}$ is an ideal of R. [7]

यदि R एक क्रमविनिमेय वलय हो और $a \in R$, तो दर्शाइये कि $Ra = \{ra \mid r \in R\}$, R की एक गुणजावली है।

----- x -----